Prefazione

Ho accettato con piacere l'invito del Dipartimento di Matematica "Ennio De Giorgi" dell'Università di Lecce a dare un Corso per gli studenti di Dottorato.

Ho accettato per ragioni diverse. Prima fra tutte, avere vissuto a Pisa dal 1959 al 1968, in stretto contatto con De Giorgi, come allievo, collaboratore, ed amico. In quei nove anni Ennio ottenne risultati clamorosi, che confermarono la fama raggiunta, in maniera esplosiva, con la risoluzione del XIX Problema di Hilbert.

Ultima, non aver mai avuto l'occasione in Italia di parlare ai Dottorandi di Ricerca.

Potendolo fare nella città di De Giorgi, nel Dipartimanto matematico che porta il suo nome, esponendo le sue idee, è stato un invito irresistibile.

Il Corso è diviso in quattro parti, ciascuna della quali è divisa in due capitoli.

I.: Il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni e il XIX Problema di Hilbert.
Il metodo diretto fu usato per la prima volta con successo da Hilbert, che lo annunciò nel 1899 ed espose compiutamente nel 1904. Con esso fu data una risoluzione del Problema dell'elettrostatica.
Hilbert si rese conto che il metodo poteva essere usato per la dimostrazione dell'esistenza del minimo di un'ampia classe di funzionali del tipo dell'integrale dell'energia. Aveva visto bene, indicando nelle funzioni Lipschitziane le più adatte concorrenti nella gara per il minimo. E non gli sfuggì la difficoltà del passaggio dalla Lipschitzianità delle funzioni minimizzanti alle ulteriori regolarità $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, $\mathcal{C}^\omega$.
Questo passaggio, divenuto famoso come XIX Problema, ebbe nel primo passo, da Lipschitz a $\mathcal{C}^1$, l'ostacolo più difficile, rimosso da De Giorgi nel 1955.

Solo nel caso del funzionale dell'energia l'ostacolo era stato di scavalcamento agevole.

II.: L'equazione delle superficie minime: il Teorema di Bernstein e le singolarità eliminabili.

Il Teorema di Bernstein fu dimostrato per la prima volta negli anni attorno al 1910 da Bernstein per le funzioni reali di due variabili reali. Nel Corso è stata presentata la derivazione di tale Teorema come corollario non banale del Teorema di Liouville per le funzioni olomorfe di una variabile complessa. Tale derivazione è frutto dei risultati di Jörgens, Heinz e Nitsche, pubblicati fra il 1954 e il 1957.

È stato ricordato che nel 1961 Moser dimostrò la tesi del Teorema di Bernstein per funzioni di un qualunque numero di variabili con l'ipotesi addizionale di limitatezza del gradiente della soluzione stessa.

Per quanto riguarda il problema della eliminazione delle singolarità è stato presentato un teorema di De Giorgi e Stampacchia del 1965. In tale teorema si afferma che se una soluzione esiste in un aperto di $\mathbb{R}^n$ privato di un compatto di misura $(n-1)$–dimensionale nulla, allora tale soluzione è estendibile ad una funzione di classe $\mathcal{C}^2$ in tutto l'aperto.

III.: Il calcolo differenziale sulle varietà di codimensione uno e le sue applicazioni.

Il calcolo differenziale intrinseco sulle varietà di codimensione uno permise a Bombieri e De Giorgi e me stesso di estendere ad ogni dimensione la stima del gradiente delle soluzioni delle superficie minime dimostrata da Finn nel caso bidimensionale.

Tale stima del gradiente ha permesso di dimostrare la limitatezza del gradiente delle soluzioni intere ricavandola da una diseguaglianza verificata dalle soluzioni stesse. Si è così dimostrata la tesi del Teorema di Bernstein in ogni dimensione con un'ipotesi aggiuntiva più debole di quella di Moser.

Abbiamo quindi introdotto le definizioni di De Giorgi di perimetro di un insieme misurabile e di frontiere minime degli insiemi misurabili. Ci siamo limitati a ricordare il famoso Teorema di De Giorgi di regolarità quasi ovunque delle frontiere minime. Abbiamo quindi presentato l'analisi delle singolarità delle frontiere minime che permise a De Giorgi di ridurre il problema dell'eliminazione di tali singolarità al caso di frontiera minima conica singolare nel solo vertice.

Abbiamo ricordato che Fleming aveva dimostrato nel 1962 la non esistenza di coni minimi singolari in $\mathbb{R}^3$. Questo risultato fu esteso alla dimensione superiore da Almgren jr. nel 1966. Nel 1968 Simons dimostrò la non esistenza di coni minimi singolari fino ad $\mathbb{R}^7$; la dimostrazione di questo Teorema è esposta nel Capitolo 6.

IV.: Esistenza di un cono minimo singolare e di una soluzione intera non banale.

Simons aveva trovato che un elementare cono singolare solo nel vertice in $\mathbb{R}^8$ soddisfaceva le ipotesi del suo Teorema. Simons aveva

congetturato che tale cono fosse minimo.
La congettura di Simons fu dimostrata vera da Bombieri, De Giorgi e Giusti nel 1969. Più tardi, Massari e me stesso demmo una seconda dimostrazione di questo risultato. Questa dimostrazione è il contenuto del Capitolo 7.
Grazie ai lavori di Fleming e De Giorgi era noto che il Teorema di Simons implicava la validità del Teorema di Bernstein per funzioni di 7 variabili.
De Giorgi, che non si aspettava l'esistenza di coni minimi singolari, era però convinto di potere utilizzare un eventuale cono minimo singolare per costruire una soluzione intera non banale. De Giorgi, in collaborazione con Bombieri e Giusti, fu capace di provare la verità di questa seconda aspettativa. In altre parole, Bombieri, De Giorgi e Giusti dimostrarono che la tesi di Bernstein era falsa per funzioni intere di 8 variabili.

Ringraziamenti. Ringrazio tutti coloro che hanno contribuito alla realizzazione del Corso, da Diego Pallara che ne ha seguito ogni passo a Michele Miranda che mi ha aiutato a scrivere queste note.

Un ringraziamento speciale debbo ai sei studenti di Dottorato, Luciana Angiuli, Valeria Leggieri, Chiara Spina e Barbara De Leo, Christian Tacelli, Luca Vergori, che hanno saputo raccontare due delle favole dello zio Ennio; il diciannovesimo problema e la stima del gradiente.

La matematica italiana, come il cervo sardo, è esposta al rischio di estinzione per l'arroganza e l'irresponsabilità di pochi. Il suo futuro è nelle mani di giovani capaci ed entusiasti, aiutati da adulti seri e generosi.